Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМУПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра компьютерных систем в управлении и проектировании

«Способы задания графа»

Отчет по лабораторной работе №1

Дисциплина «Дискретная математика»

Студент гр. з-512П12-6

Волков Д.В.

________________ «___» __2023 г.

(подпись)

Руководитель:

Кандидат технических наук, доцент каф. КСУП

Жигалова Е.Ф.

________________ ________________

(оценка) *(подпись)*

«___» _____2023 г.

Серов 2023

Содержание

Введение

Цель лабораторной работы: изучить основные понятия, определения и терминологию теории графов, классы графов, способы задания графа, простейшие операции на графах, числовые характеристики графа и способы их вычисления.

Выполнение работы

Задание №1

ВАРИАНТ 24

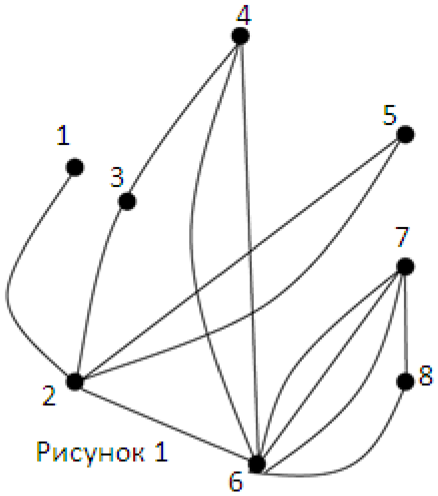


Рисунок 1

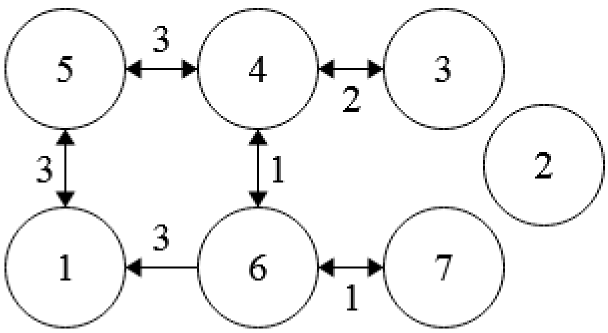
Рисунок 2

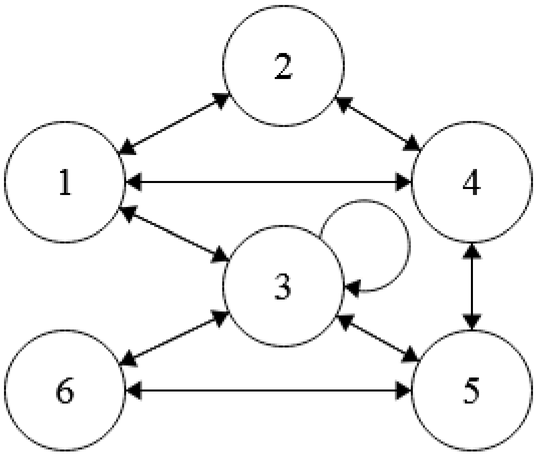
	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	3	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	2	0	0	0
4	0	0	2	0	3	1	0
5	3	0	0	3	0	0	0
6	3	0	0	1	0	0	1
7	0	0	0	0	0	1	0

Рисунок 3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	0	1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	1	0	0	0	1	1
4	1	0	0	0	1	1	0	0	0
5	0	0	1	0	0	1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	1	1	0

По матрицам (рис. 2 и 3) построить диаграммы графов, определив предварительно вид данных матриц.





Задание №2

Методами поиска «в глубину» и «в ширину» найти наибольший минимальный маршрут между вершинами графа (рис. 1).

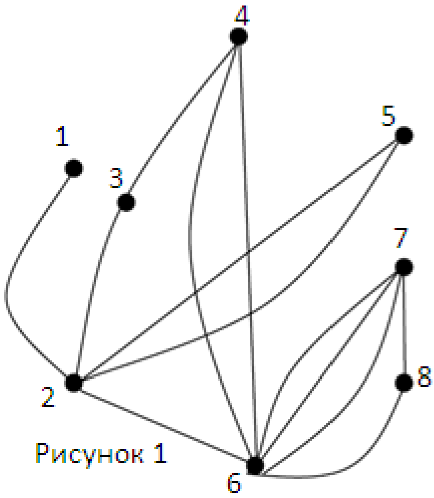


Рисунок 1

Поиск в ширину

1.Для начала составим пустую матрицу смежности с нулями на главной диагонали.
2.Затем осуществляем итеративный алгоритм: произвольно выбираем вершину, обозначаем расстояния от неё до смежных с ней, для данной вершины выбираем меньшее из следующих значений: для всяких уже рассмотренных вершин вычисляем сумму кратчайших путей от данной вершины до смежных с рассматриваемой вершиной узлов, которые были обработаны в предыдущих итерациях алгоритма, с расстоянием от рассматриваемой вершины до этого узла, смежного ей и рассмотренного в алгоритме ранее.
3.Если, при переходе к следующему шагу алгоритма, есть выбор между несколькими вершинами, то выбирается ближайшая к данной, при равенстве расстояний (например, не взвешенный граф – наш случай), порядок вершин можно задать произвольно.

$$0:\begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad 1:\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$2:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & & 2 & 2 & & \\ 1 & 0 & 1 & & 1 & 1 & & \\ 2 & 1 & 0 & & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ 2 & 1 & & & 0 & & & \\ 2 & 1 & & & & 0 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad 3:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & & 2 & 2 & & \\ 1 & 0 & 1 & & 1 & 1 & & \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & & \\ & & 1 & 0 & & & & \\ 2 & 1 & 2 & & 0 & & & \\ 2 & 1 & 2 & & & 0 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$4:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & & \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & & \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & & \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & & \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & & & \\ 2 & 1 & 2 & 1 & & 0 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad 5:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & & \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & & \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & & \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & & \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & & \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$6:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & & \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & & \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & & \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & & \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & & \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 0 & \\ & & & & & 1 & & 0 \end{pmatrix} \quad 7:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 & \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 3 & \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$8:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Наибольший элемент таблицы: 3.

Поиск в глубину

1.Для начала, при поиске в глубину, нужно составить иерархическое дерево графа, для этого произведём выбор произвольной вершины и будем производить рекурсивный выбор смежной с текущей выбранной вершины с пометкой шага, на котором выбор вершины произведён, при невозможности выбрать новую не выбранную ранее вершину, «откатываемся назад», производя отметку шага, на котором выбор вершины был отменён:

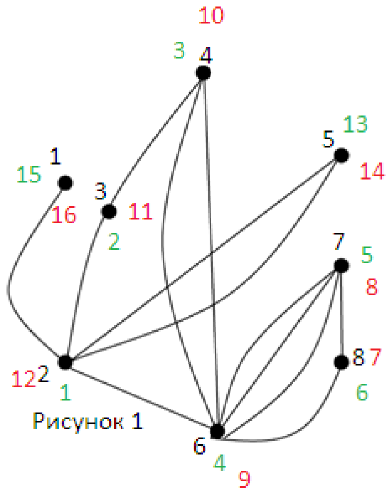
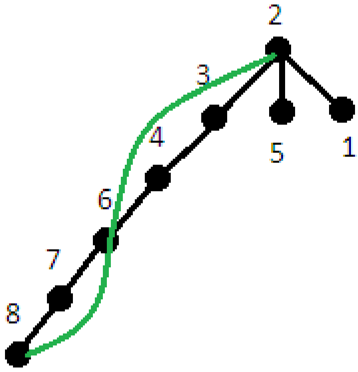


Рисунок 1

2.Составим дерево и отметим обратные рёбра:



3.Были рассмотрены разделённые обратными рёбрами связные поддеревья и заданы в них кратчайшие расстояния:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 0 & 1 & & 2 & & \\ & 2 & 1 & 0 & & 1 & & \\ & 1 & & & 0 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & 0 & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.Вычислим расстояния с учётом расстояний до связующих вершин между соседними поддеревьями:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & & \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & & \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ & 2 & 3 & 2 & & 1 & 0 & 1 \\ & 2 & 3 & 2 & & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5.Для прочих вершин:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6.Наибольший элемент таблицы: 3.

Задание №3

Для каждой пары вершин графа (рис. 1) аналитическим способом вычислить количество маршрутов длины, равной 4, и выделить те пары вершин, для которых их количество ≥ 3, но не более 10. Выписать эти маршруты для какой-либо из выделенных пар. В описании маршрутов указывать вершины и ребра, входящие в него.

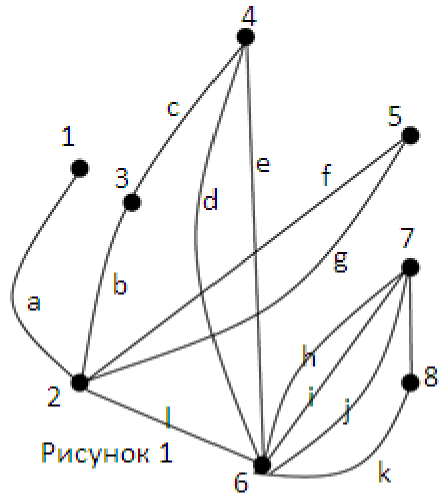


Рисунок 1

1.Составим матрицу смежности изначального графа:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.Анализируя граф, можем сказать, что для вычисления числа маршрутов фиксированной длины между всеми его вершинами, нам нужно возвести его матрицу смежности в степень числа нужной длины:

$$A^4 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 10 & 0 & 14 & 23 & 1 & 3 \\ 0 & 68 & 0 & 56 & 0 & 6 & 72 & 24 \\ 10 & 0 & 18 & 0 & 20 & 56 & 3 & 9 \\ 0 & 56 & 0 & 74 & 0 & 12 & 105 & 35 \\ 14 & 0 & 20 & 0 & 28 & 46 & 2 & 6 \\ 23 & 6 & 56 & 12 & 46 & 249 & 34 & 54 \\ 1 & 72 & 3 & 105 & 2 & 34 & 155 & 54 \\ 3 & 24 & 9 & 35 & 6 & 54 & 54 & 27 \end{pmatrix}$$

3.Искомые пары вершин: $(\mathbf{1},\mathbf{1})$; $(\mathbf{1};\mathbf{8})$; $(\mathbf{2},\mathbf{6})$; $(\mathbf{3},\mathbf{7})$; $(\mathbf{3},\mathbf{8})$; $(\mathbf{5},\mathbf{7})$; $(\mathbf{5},\mathbf{8})$**.**

Опишем маршруты между вершинами 1 и 8**: (1$\boldsymbol{a}$2l6h8);(1a2l6i8);(1a2l6j8);**

Задание №4

Построить матрицу метрики графа (рис. 1).

Для этого для матрицы связности R найдём $S^1 = R + E$, затем каждый шаг будем получать $S^{i'} = S^{i-1}S$, для всех ячеек, которые являются нулевыми в S^{i-1} и ненулевыми в $S^{i'}$ зададим значение i, прочие скопируем из S^{i-1} в S^i. Если $S^{i-1} = S^i$, то завершаем алгоритм, находя матрицу метрики M, копируя туда все ненулевые ячейки из S^i, а вместо нулевых задавая ∞, $m_{ii} = 0$.

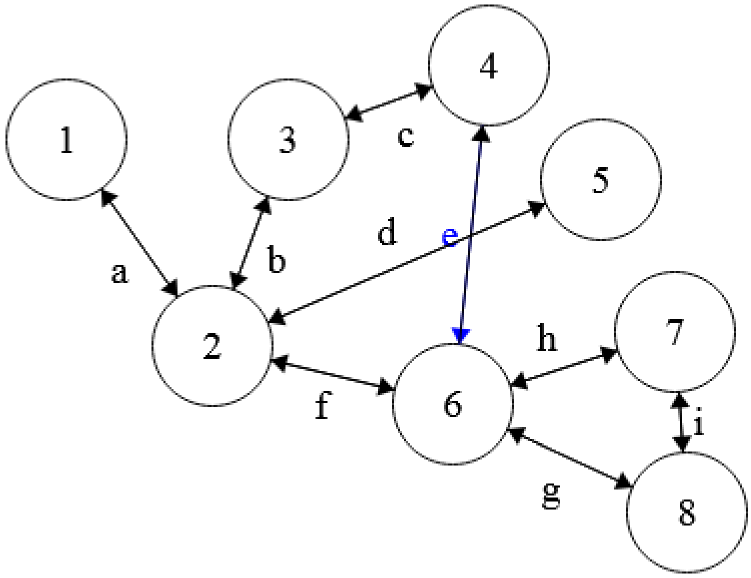
$$S^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$S^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; S^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Задание №5

С помощью алгоритма Магу – Вейсмана выполнить правильную раскраску вершин графа с минимальным количеством цветов.



$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ 1 & 1 & & 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & & & 1 & & 1 \\ & & & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_L = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_4)(x_2 + x_5)(x_2 + x_6)(x_4 + x_6)(x_6 + x_7)(x_6 + x_8)(x_7 + x_8) = (x_2 + x_1x_3x_5)(x_6 + x_2x_4x_7x_8)(x_3 + x_4)(x_7 + x_8)$$
$$= x_2x_3x_6x_7 + x_2x_3x_6x_8 + x_2x_4x_6x_7 + x_2x_4x_6x_8 + x_2x_4x_7x_8 + x_2x_3x_4x_7x_8 + x_1x_3x_5x_6x_7 + x_1x_3x_5x_6x_8 + x_1x_3x_4x_5x_6x_7 + x_1x_3x_4x_5x_6x_8 + x_1x_2x_3x_4x_5x_7x_8$$

$$x_1x_4x_5x_8 + x_1x_4x_5x_7 + x_1x_3x_5x_8 + x_1x_3x_5x_7 + x_1x_3x_5x_6 + x_1x_5x_6 + x_2x_4x_8 + x_2x_4x_7 + x_2x_8 + x_2x_7 + x_6$$

1	1	1	1	1	1					
						1	1	1	1	
		1	1	1						
1	1					1	1			
1	1	1	1	1	1					
				1	1					1
	1		1				1			
1		1				1		1	1	

$$x_1x_3x_5x_7 + x_2x_4x_8 + x_6$$

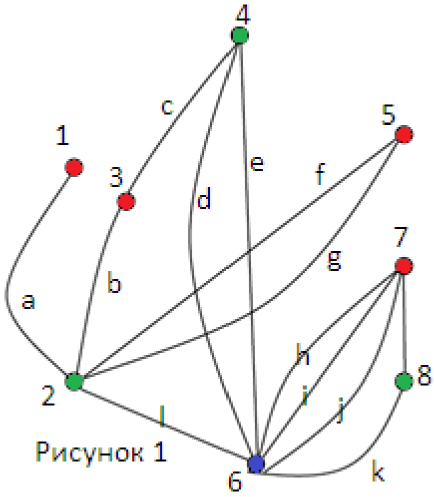


Рисунок 1

Задание №6

Определить число вершинного покрытия графа (рис. 1).

На основании

$$x_1x_4x_5x_8 + x_1x_4x_5x_7 + x_1x_3x_5x_8 + x_1x_3x_5x_7 + x_1x_3x_5x_6 + x_1x_5x_6 + x_2x_4x_8 + x_2x_4x_7 + x_2x_8 + x_2x_7 + x_6$$

из предыдущего задания, имеем число вершинного покрытия равным **4.**

Задание №7

Определить, содержит ли граф (рис. 1) эйлерову цепь или эйлеров цикл. Ответ обосновать.

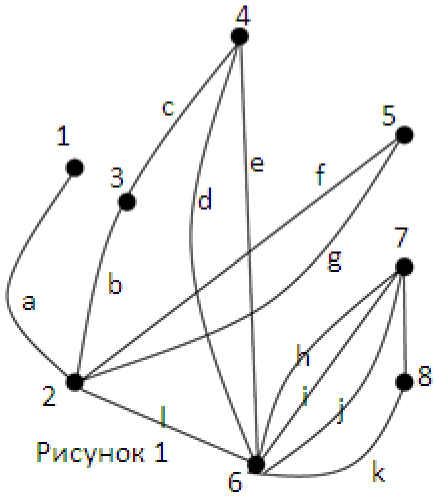


Рисунок 1

Имеем более двух вершин, имеющих нечётную степень: узлы 1,2,4,6. Так что в нём эйлерова цикла и эйлеровой цепи быть не может.

Задание №8

Аналитическим способом определить число компонент связности графа.

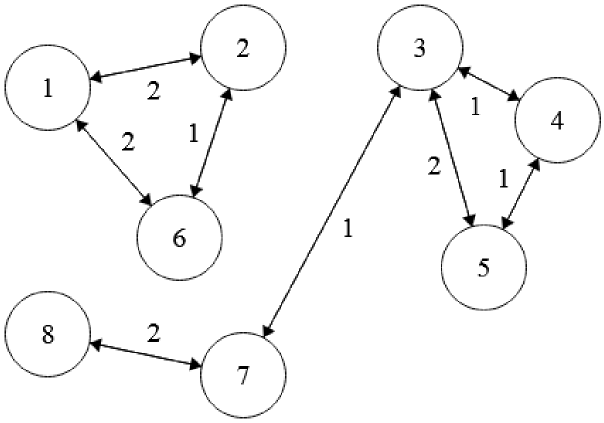
ВАРИАНТ 24

$r_{1,2} = 2$ $r_{3,4} = 1$

$r_{2,6} = 1$ $r_{4,5} = 1$

$r_{1,6} = 2$ $r_{3,5} = 2$

$r_{3,7} = 1$ $r_{7,8} = 2$



1.Будем обходить граф в ширину (имеем очередь и множество, в очередь добавляем в конец все новые вершины, смежные с той, что в начале очереди в эту итерацию алгоритма, эти же вершины добавляем в множество, в конце итерации убираем первый элемент из очереди.

2.Повторяем, пока очередь не окажется пуста, узлы в множестве – компонента связности графа), выбираем вершину произвольно:

{1}, Q (1)

{1, 2, 6}, Q (2)

{1, 2, 6}, Q (6)

{1, 2, 6,}, Q ()

{3}, Q (3)

{3, 4, 5, 7}, Q (4, 5, 7)

{3, 4, 5, 7}, Q (5, 7)

{3, 4, 5, 7, 8}, Q (7)

{3, 4, 5, 7, 8}, Q (8)

{3, 4, 5, 7, 8}, Q ()

Компоненты связности: $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{6}\}, \{\mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{7}, \mathbf{8}\}$

Заключение

Были изучены:
- Основные понятия графов
- Определения и терминология графов
- Классы графов
- Способы задания графа
- Простейшие операции на графах
- Числовые характеристики графа и способы их вычислений

Список использованной литературы

1.Хаггарти Род. Дискретная математика для программистов : учеб. пособие для вузов : пер. с англ. / Род. Хаггарти. — 2-е изд., доп. — М. : Техносфера, 2005. — 393 с.

2.Макоха А. Н. Дискретная математика : учеб. пособие для вузов / А. Н. Макоха. — М. : Физматлит, 2005. — 368 с.

3.Шапорев С. Д. Математическая логика. Курс лекций и практических занятий : учеб. пособие для вузов / С. Д.Шапорев. — БХВ-Петербург, 2005.

4.Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов : учеб. пособие для вузов / Ф. А. Новиков. — 2-е изд. — СПб. ; М. ; Нижний Новгород.